Gekoppelte Pendel A, B, C

Lösung

Die Ausgangssituation bilden die folgenden Gleichungen

$$q_1(t) = c \cdot \cos(\Omega_1 t) \tag{1}$$
$$q_2(t) = c \cdot \cos(\Omega_2 t) \tag{2}$$

Wie in der Aufgabe erwähnt werden die Koordinaten x_1 und x_2 als Linearkombination von q_1 und q_2 umgeschrieben. Dadurch wird folgendes erhalten

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2} \cdot c \cdot [\cos(\Omega_1) + \cos(\Omega_2 t)] \\ &= c \cdot \cos\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t\right) \\ x_2(t) &= \frac{1}{2} \cdot c \cdot [\cos(\Omega_1) - \cos(\Omega_2 t)] \\ &= -c \cdot \sin\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Die Periodendauer der Schwebungsmodulation lässt sich wie folgt bestimmen

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} \Rightarrow T = \frac{4\pi}{\Omega_1 - \Omega_2} \,.$$

Zusatzinformationen

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) - \cos(\beta) &= Re[cis(\alpha) - cis(\beta)] \\ &= Re\left[e^{i\alpha} - e^{i\beta}\right] \\ &= Re\left[e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right] \\ &= Re\left[e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \cdot e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \cdot e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right] \\ &= Re\left[e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \cdot \left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right)\right] \\ &= Re\left[2i \cdot e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \cdot \underbrace{\left(\frac{e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}}{2i}\right)}_{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right] \\ &= Re\left[2i \cdot cis\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] \\ &= -2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \,. \end{aligned}$$